# 第三单元 一元函数的导数及其应用

## 基础课16 导数的概念及其意义、导数的运算

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 导数的概念及其几何意义、导数的运算 | 掌握 | 2023年全国甲卷（文）  2023年全国乙卷（理）  2023年全国乙卷（文）  2023年北京卷  2023年天津卷 | ★★★ | 数学运算直观想象逻辑推理 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，导数的运算及其几何意义是高考常考内容，试题难度中等偏下.命题热点为复合函数求导，预计2025年高考命题情况变化不大 | | | |

### 基础知识·诊断

#### 夯实基础

##### 一、函数在处的导数

|  |  |
| --- | --- |
| 定义 | 在数学中,称瞬时变化率为函数在点x0处的①　导数　,通常用符号②　f'(x0)　表示,记作f'(x0)==③ 　.一般地,如果一个函数y=f(x)在区间(a,b)的每一点x处都有导数f'(x)=④ 　,那么f'(x)是关于x的函数,称f'(x)为y=f(x)的导函数,简称为导数,有时也将导数记作⑤　y' |
| 几何意义 | 函数在处的导数的几何意义是曲线在点处的切线的斜率，即⑥，切线的方程为⑦ |

##### 二、基本初等函数的导数公式

|  |  |
| --- | --- |
| 基本初等函数 | 导函数 |
| 为常数 |  |
| 且 |  |
|  |  |
|  |  |
| 且 |  |
|  | ⑪ |
| 且 |  |
|  |  |

##### 三、导数的运算法则

若，存在，则

（1）；

（2）⑫;

（3）⑬;

（4）.

##### 四、复合函数的定义及其导数

|  |  |
| --- | --- |
| 定义 | 一般地，对于两个函数和，如果通过中间变量,可以表示成⑭的函数，那么称这个函数为函数和的复合函数，记作⑮ |
| 导数 | 对于由函数和复合而成的函数，它的导数和函数，的导数间的关系为⑯ |

###### 知识 拓展

1.代表函数在处的导数值；是函数值的导数，且.

2..

3.曲线的切线与曲线的公共点不一定只有一个，而直线与曲线相切只有一个公共点.

4.函数的导数反映了函数的瞬时变化趋势，其正、负号反映了变化的方向，其大小反映了变化的快慢，越大，曲线在这点处的切线越“陡”.

#### 诊断自测

##### 题组1 走出误区

1. 判一判.（对的打“√”,错的打“×”）

（1） 是函数在附近的平均变化率.( × )

（2） 曲线在某点处的切线与曲线过某点的切线意义是相同的.( × )

（3） .( × )

（4） 若，则.( × )

2. （易错题）过点且与曲线相切的直线方程为或.

【**易错点**】容易混淆“在点”和“过点”而漏解.

[解析]因为，所以，设过点的切线与曲线相切于点，根据导数的几何意义，曲线在点处的切线的斜率为，过点的切线的斜率为，所以，解得或，所以或，因此曲线过点的切线方程为或，即或.

##### 题组2 走进教材

3. （人教A版选修②P81·练习T2改编）若函数在处的导数不大于，则实数的取值范围为.

[解析]因为，所以，所以，由得，所以实数的取值范围为.

4. （人教A版选修改编）已知函数满足，则曲线在处的切线方程为.

[解析]依题意得，，令，得，解得.因为，所以曲线在处的切线方程为，即.

##### 题组3 走向高考

5. [2023·全国乙卷改编]已知函数，则曲线在点处的切线方程为.

[解析]由，可得，又，所以曲线在点处的切线方程为，即.

### 考点聚焦·突破

#### 考点一 导数的运算［自主练透］

1. 设函数满足，则( A ).

A. B. 1 C. D. 2

[解析]因为

，所以，故选.

2. （多选题）下列求导运算正确的是( AD ).

A. 若，则

B. 若，则

C. 若，则

D. 若，则

3. 已知函数，则( D ).

A. B. C. D.

[解析]，

，，

，.故选.



1.求函数的导数要准确地把函数拆分成基本初等函数的和、差、积、商，再利用运算法则求导.

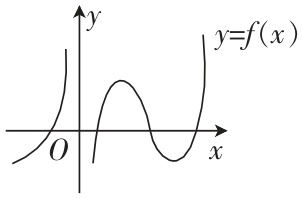
2.抽象函数求导，恰当赋值是关键，然后活用方程思想求解.

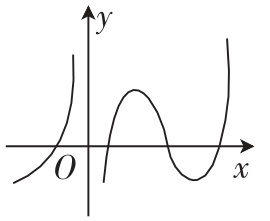
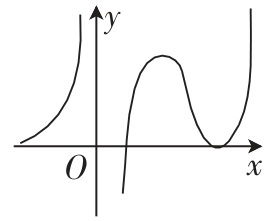
3.复合函数求导，应由外到内逐层求导，必要时进行换元.

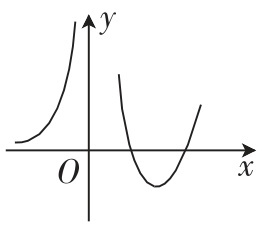
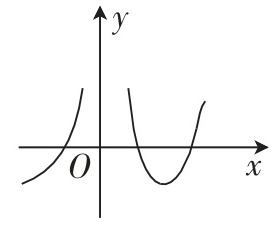
#### 考点二 导数的几何意义及其应用［多维探究］

##### 导数与函数的图象的关系角度1

典例1 [2024·广西模拟]设函数在定义域内可导，的大致图象如图所示，则导函数的图象可能是( C ).

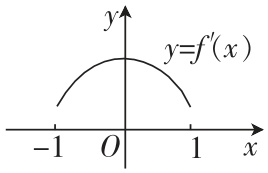


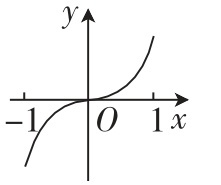
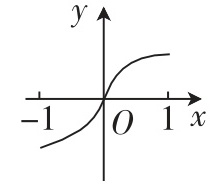
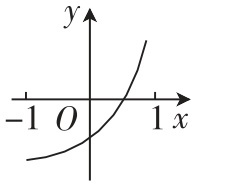
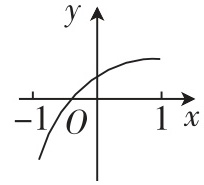
A.  B. 

C.  D. 

[解析]原函数的单调性如下:当时，单调递增；当时，的单调性变化依次为增、减、增.故当时，；当时，的符号变化依次为，，.故选.

变式设问 已知函数在内的图象是下列四个图象之一，且其导函数在内的图象如图所示，则该函数的图象是( B ).



A.  B.  C.  D. 

[解析]由在内的图象是先上升后下降可知，函数图象的切线的斜率先增大后减小，故选.



**解决导数与函数图象的关系问题的两个关键点**

1.抓住函数在单调递增区间内的导数值为正，函数在单调递减区间内的导数值为负.

2.抓住函数图象在每一点处的切线斜率的变化情况反映导函数图象在相应点处的变化情况.

##### 求切线方程角度2

典例2 [2023·全国甲卷]曲线在点处的切线方程为( C ).

A. B. C. D.

[解析]设曲线在点处的切线方程为，因为，所以，所以，所以，则曲线在点处的切线方程为.故选.

变式设问 若将本例中的条件“在点处”改为“过点”，则切线方程为.

[解析]设切点为，因为切线过点，所以切线斜率，

因为，所以，

即，解得，则，

则切线方程为.



**求曲线过点的切线方程的步骤**

1.当是切点时，切线方程为.

2.当不是切点时，可分以下四步完成：

第一步，设出切点坐标；

第二步，写出过点的切线方程；

第三步，将点代入切线方程求出；

第四步，将的值代入方程可得过点的切线方程.

##### 求切点坐标角度3

典例3 设曲线在点处的切线与曲线在点处的切线垂直，则点的坐标为.

[解析] 函数的导函数为， 曲线在点处的切线的斜率.设点的坐标为， 函数的导函数为，

曲线在点处的切线的斜率，由题意知，即，解得，又，.又 点在曲线上，，故点的坐标为.



求切点坐标，其一般思路是先求函数的导数，然后让切点处的导数值等于切线的斜率，从而求出切点的坐标．

##### 根据切线方程求参数值（范围）角度4

典例4（1） [2023·北京卷节选]（双空题）设函数，曲线在点处的切线方程为，则,1.

[解析]因为,，

所以，

因为曲线在点处的切线方程为，

所以，，

则解得

（2） [2022·新高考Ⅰ卷]若曲线有两条过坐标原点的切线，则的取值范围是.

[解析]易得曲线不过原点，设切点为，则切线的斜率为,可得切线方程为.又切线过原点，可得，化简得,

又切线有两条，所以方程有两个不相等的实根，则判别式，得或.

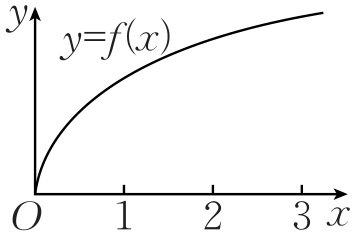


**处理与切线有关的参数问题的方法**

通常根据曲线、切线、切点的三个关系列出关于参数的方程（组）进行求解，注意以下三点：切点处的导数值是切线的斜率；切点在切线上；切点在曲线上.

##### 多维训练

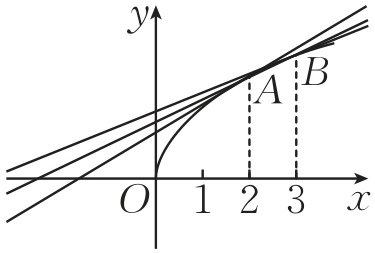
1. [2024·东莞模拟]已知函数的图象如图所示，则下列不等关系正确的是( D ).



A. B.

C. D.

[解析]如图，为函数的图象在点处的切线的斜率，



为函数的图象在点处的切线的斜率，

表示直线的斜率，

由图可知.故选.

2. 已知函数，若直线过点且与曲线相切，则直线的方程为.

[解析]设切点坐标为，则，

因为,，所以切线的斜率为，

所以，解得,，

所以直线的方程为.

3. [2024·江苏联考]已知直线与曲线相切，则.

[解析]设切点为，且，则切线方程为，即，

因为直线是曲线的切线，

所以

所以，解得，

所以.

4. [2024·陕西联考]若函数在区间内的图象上存在两条相互垂直的切线，则实数的取值范围是.

[解析]由题意得，函数的定义域为.

设切点横坐标为，切线斜率为，

则，

当时，，故不存在；

当时，解得.

故实数的取值范围是.

#### 考点三 公切线问题［师生共研］

典例5 若函数的图象在点处的切线与函数的图象也相切，则满足条件的切点的个数为2.

[解析]由函数的导数为，可得点处的切线斜率为，切线方程为，

函数的导数为，设与图象的切点为，可得切线斜率为，切线方程为，

由题意可得

即，

解得或，故满足条件的点的个数为2.



**两条曲线的公切线问题的求解方法**

1.利用其中一条曲线在某点处的切线与另一条曲线相切，列出关系式求解.

2.设公切线在曲线上的切点为，在曲线上的切点为，则，再解决相关问题.

##### 针对训练

1. 已知函数,，设两曲线有公共点，且在点处的切线相同，当时，实数的最大值为.

[解析]设，,，

由题意知，,，

即， ①

， ②

解②得或（舍去），

代入①得,，令,，则，

当时，；当时，.

故当时，实数取得最大值，最大值为.

2. [2022·全国甲卷节选]已知函数,，曲线在点处的切线也是曲线的切线，求实数的取值范围.

[解析]由得，所以切线的斜率，则切线方程为，即，由得，

设曲线上的切点为，则切线方程为.

即，所以

则，即.

令，则，

故当 ,时，,单调递减；当时，,单调递增；当时，,单调递减；当时，,单调递增.

因为,，所以.

又因为当 时， ，所以，

故，即.

3. 已知函数,，试探究函数与的图象在其公共点处是否存在公切线.若存在，研究满足条件的的值的个数；若不存在，请说明理由.

[解析]假设函数与的图象在其公共点处存在公切线.由题意得，，，由得，即，

所以，解得.

因为函数的定义域为，

所以当时，，函数与的图象在其公共点处不存在公切线；

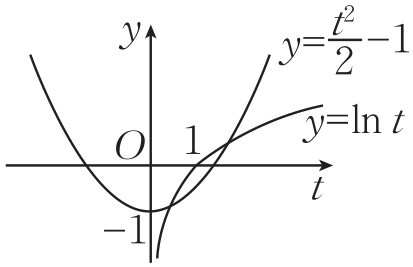
当时，由，，，

得，即，

下面研究满足此等式的的值的个数：

设，则，且，方程化为，

分别画出和的图象，如图,



由图可得和的图象有且只有两个公共点（且均符合），

所以方程有且只有两个根.

综上，当时，函数与的图象在其公共点处不存在公切线；当时，函数与的图象在其公共点处存在公切线，且满足条件的的值有且仅有两个.